

Prof. Dr. Alfred Toth

Ein trajektisches System für thematische Abbildungen

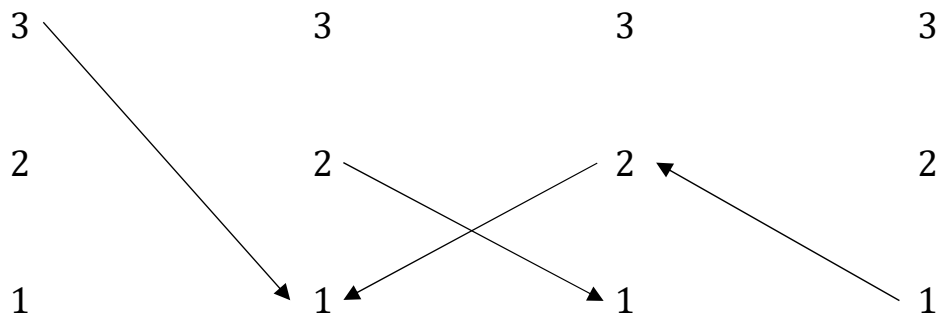
1. Die Komposition zweier Abbildungen, z.B.

$$1 \rightarrow 2 \circ 2 \rightarrow 3,$$

ergibt, je nach kategorientheoretischer Konvention, entweder $(1 \rightarrow 3)$ oder $(3 \rightarrow 1)$, aber keineswegs $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$, wie dies von Walther (1979, S. 79) behauptet wurde (vgl. dazu Toth 2025a). Die Verknüpfung der beiden Dyaden erfolgt vielmehr durch eine Trajektion der Form (vgl. Toth 2025b)

$$3 \rightarrow 1 \quad 2 \rightarrow 1 \quad | \quad 1 \leftarrow 2 \quad 2 \leftarrow 1,$$

graphisch dargestellt:



Der trajektische Rand enthält also nur scheinbar eine Verdoppelung des Objektbezugs, denn es gilt

$$(2 \rightarrow 1 \mid 1 \leftarrow 2) \Rightarrow (2 \rightarrow 1) \neq (1 \leftarrow 2).$$

2. Die in Toth (2025c) dargestellten 2 mal $(3! = 6) = 12$ Abbildungen in ternären Relationen

1. Wege von 1 nach z

$$\mathfrak{T}^{\mu\xi}(1.z, 3.x, 2.y) = (1 \rightarrow z, 3 \rightarrow x \mid x \leftarrow 3, y \leftarrow 2)$$

$$\mathfrak{T}^{\mu\xi}(1.z, 2.y, 3.x) = (1 \rightarrow z, 2 \rightarrow y \mid y \leftarrow 2, x \leftarrow 3)$$

2. Wege von z nach 1

$$\mathfrak{T}^{-1\xi\mu}(z.1, y.2, x.3) = (1 \leftarrow z, 2 \leftarrow y \mid y \rightarrow 2, x \rightarrow 3)$$

$$\mathfrak{T}^{-1\xi\mu}(z.1, x.3, y.2) = (1 \leftarrow z, 3 \leftarrow x \mid x \rightarrow 3, y \rightarrow 2)$$

3. Wege von 2 nach y

$$\mathfrak{T}^{\mu\xi}(2.y, 3.x, 1.z) = (2 \rightarrow y, 3 \rightarrow x \mid x \leftarrow 3, z \leftarrow 1)$$

$$\mathfrak{T}^{\mu\xi}(2.y, 1.z, 3.x) = (2 \rightarrow y, 1 \rightarrow z \mid z \leftarrow 1, x \leftarrow 3)$$

4. Wege von y nach 2

$$\mathfrak{T}^{-1\xi\mu}(y.2, z.1, x.3) = (2 \leftarrow y, 1 \leftarrow z \mid z \rightarrow 1, x \rightarrow 3)$$

$$\mathfrak{T}^{-1\xi\mu}(y.2, x.3, z.1) = (2 \leftarrow y, 3 \leftarrow x \mid x \rightarrow 3, z \rightarrow 1)$$

5. Wege von 3 nach x

$$\mathfrak{T}^{\mu\xi}(3.x, 2.y, 1.z) = (3 \rightarrow x, 2 \rightarrow y \mid y \leftarrow 2, z \leftarrow 1)$$

$$\mathfrak{T}^{\mu\xi}(3.x, 1.z, 2.y) = (3 \rightarrow x, 1 \rightarrow z \mid z \leftarrow 1, y \leftarrow 2)$$

6. Wege von x nach 3

$$\mathfrak{T}^{-1\xi\mu}(x.3, z.1, y.2) = (3 \leftarrow x, 1 \leftarrow z \mid z \rightarrow 1, y \rightarrow 2)$$

$$\mathfrak{T}^{-1\xi\mu}(x.3, y.2, z.1) = (3 \leftarrow x, 2 \leftarrow y \mid y \rightarrow 2, z \rightarrow 1)$$

können nun durch Belegungen der Variablen $x, y, z \in (1, 2, 3)$ in konkrete Zeichenrelationen transformiert werden. Die Zahl der invarianten semiotischen Abbildungen ist jedoch natürlich viel kleiner, es sind genau die neun Semiosen, die wir hier kategorientheoretisch definieren (vgl. Toth 1997, S. 15 ff.).

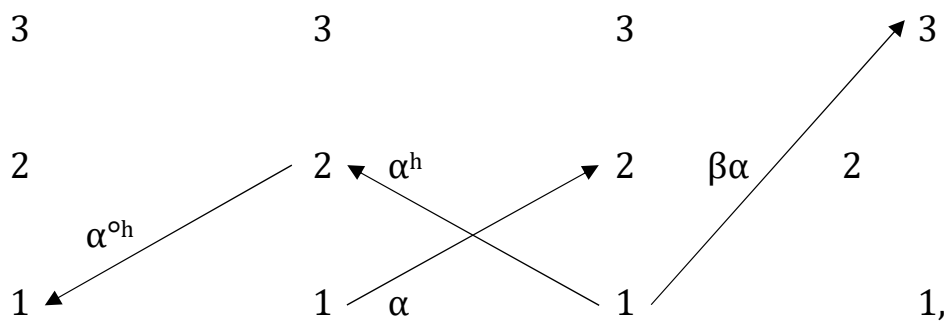
$$\begin{array}{llll} 1 \rightarrow 2 & =: \alpha & 2 \rightarrow 1 & =: \alpha^\circ \\ 2 \rightarrow 3 & =: \beta & 3 \rightarrow 2 & =: \beta^\circ \\ 1 \rightarrow 3 & =: \beta\alpha & 3 \rightarrow 1 & =: \alpha^\circ\beta^\circ \\ 1 \rightarrow 1 & =: \text{id}_1 & & \\ 2 \rightarrow 2 & =: \text{id}_2 & & \\ 3 \rightarrow 3 & =: \text{id}_3 & & \end{array}$$

3. Wie man sieht, besteht allerdings der nicht unbedeutende Nachteil der traditionellen kategorientheoretischen Definitionen in der Neutralisierung der doppelten Hin- und Rückwege, d.h. es fallen z.B. in α° ($2 \rightarrow 1$) und ($1 \leftarrow 2$) zusammen. Will man die gesamten 24 (!) Abbildungen, die nicht nur die Morphismen, sondern auch die Heteromorphismen enthalten, haben, so kann man z.B. mittels des Sonderzeichens „h“ (für heteromorph) die Ambiguitäten rückgängig machen:

$$\begin{array}{llll} 1 \rightarrow 2 & =: \alpha & 2 \rightarrow 1 & =: \alpha^\circ \\ 2 \leftarrow 1 & =: \alpha^h & 1 \leftarrow 2 & =: \alpha^{\circ h} \\ 2 \rightarrow 3 & =: \beta & 3 \rightarrow 2 & =: \beta^\circ \\ 3 \leftarrow 2 & =: \beta^h & 2 \leftarrow 3 & =: \beta^{\circ h} \end{array}$$

$1 \rightarrow 3 =: \beta\alpha$	$3 \rightarrow 1 =: \alpha^\circ\beta^\circ$
$3 \leftarrow 1 =: \beta\alpha^h$	$1 \leftarrow 3 =: \alpha^\circ\beta^{\circ h}$
$1 \rightarrow 1 =: \text{id}_1$	$1 \rightarrow 1 =: \text{id}_1$
$1 \leftarrow 1 =: \text{id}_1^h$	$1 \leftarrow 1 =: \text{id}_1^h$
$2 \rightarrow 2 =: \text{id}_2$	$2 \rightarrow 2 =: \text{id}_2$
$2 \leftarrow 2 =: \text{id}_2^h$	$2 \leftarrow 2 =: \text{id}_2^h$
$3 \rightarrow 3 =: \text{id}_3$	$3 \rightarrow 3 =: \text{id}_3$
$3 \leftarrow 3 =: \text{id}_3^h$	$3 \leftarrow 3 =: \text{id}_3^h$

Z.B. haben wir



d.h. es ist

$$\mathfrak{T}^{-1\xi\mu}(2.1, 1.2, 1.3) = (1 \leftarrow 2, 2 \leftarrow 1 \mid 1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3) = [\alpha^{\circ h}, \alpha^h \mid \alpha, \beta\alpha].$$

Die 24 morphismisch-heteromorphismen Abbildungen, die das Gesamtsystem aller permutativen ZKln- und RThn-Systeme umfassen, kann man in 12 thematisch-morphismische und 12 dethematisch-heteromorphismische einteilen. Die identischen Abbildungen kodieren dann athematische Abbildungen. Die Konversionen schließlich kodieren Links-Rechts-/Rechts-Link, Vorn-Hinten-/Hinten-Vorn oder Oben-Unten-/Unten-Oben-Abbildungen. Wie man die beiden Haupttypen kategorientheoretischer thematischer Abbildungen, α und β , modelltheoretisch interpretiert, ist vorderhand noch offen.

Literatur

Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Walthers Triaden als Durchschnitte von Dyaden. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025a

Toth, Alfred, Das trajektische semiotische Bi-System. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025b

Toth, Alfred, Trajektische Hin- und Rückwege. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025c

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

17.10.2025